

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Департамент образования Вологодской области

Управление образования Администрации города Вологды

МОУ "Гимназия № 2"

ПРИНЯТО

Заседанием педсовета
Протокол №1
от «30» августа 2023 г.

УТВЕРЖДЕНО

Приказом директора
№202-ОД
от «31» августа 2023 г.

**Рабочая программа
курса**

**Решение задач
повышенной
сложности по
математике**

Содержание элективного курса

Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах

Основные определения. Область допустимых значений. О системах и совокупностях уравнений и неравенств. Общие методы преобразования уравнений (рациональные корни уравнения, "избавление" от знаменателя, замена переменной в уравнении). Представление о рациональных алгебраических выражениях. Дробно-рациональные алгебраические уравнения. Общая схема решения. Метод замены при решении дробно-рациональных уравнений.

Методы решения неравенств

Некоторые свойства числовых неравенств. Неравенства с переменной. Метод интервалов для рациональных неравенств. Метод замены множителей. Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Общая схема решения методом сведения к совокупности систем. Метод интервалов решения дробно-рациональных алгебраических неравенств.

Методы решения систем уравнений

Системы алгебраических уравнений. Замена переменных. Однородные системы. Симметрические системы.

Уравнения с модулем

Модуль числа. Свойства модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль. Геометрическая интерпретация модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль, используя его определение. График функции $y = |x|$. Методы решения уравнений с модулем. Решение комбинированных уравнений, содержащих переменную и переменную под знаком модуля. Построение графиков функций, содержащих неизвестное под знаком модуля.

Неравенства с модулем

Теорема о равносильности неравенства с модулем и рационального неравенства. Основные методы решения неравенств с модулем.

Уравнения с параметрами

Понятие уравнения с параметром, примеры. Контрольные значения параметра. Основные методы решения уравнений с параметром.

Неравенства с параметрами

Понятие неравенства с параметром, примеры. Основные методы решения неравенств с параметрами.

Решение неравенств методом рационализации

Алгоритм решения уравнений методом рационализации. Решение уравнений с нестандартным условием.

Тригонометрические уравнения и неравенства

Сведение тригонометрических уравнений простейшим с помощью тождественных преобразований. Сведение тригонометрического уравнения к рациональному с одним неизвестным. Метод решения тригонометрических уравнений и неравенств. Отбор

корней в тригонометрических уравнениях. Примеры систем тригонометрических уравнений. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Обобщение метода интервалов на тригонометрической окружности. Решение тригонометрических неравенств методом интервалов.

Иррациональные уравнения и неравенства

Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятие арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выражения и уравнения. Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями. Неэквивалентные преобразования. Сущность проверки. Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами. Сведение иррациональных уравнений к системам. Освобождение от радикалов. Метод оценки. Использование монотонности. Использование однородности. Иррациональные алгебраические неравенства. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений. Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностям систем). Дробно-иррациональные неравенства. Сведение к совокупностям систем. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств. Замена при решении иррациональных неравенств.

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

Методы решения показательных и логарифмических уравнений. Преобразования логарифмических уравнений. Замена переменных в уравнениях. Логарифмирование. Показательные и логарифмические неравенства. Методы решений показательных и логарифмических неравенств (метод замены переменных, метод замены множителей). Основные типы показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Основные способы их решения. Примеры потери корней и приобретения лишних корней. Решение показательных и логарифмических уравнений, содержащих неизвестную в основании. Использование свойств функции. Графический способ решения. Использование нескольких приёмов при решении логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

Нестандартные методы решения уравнений и неравенств

Использование свойств функции (свойство ограниченности, монотонности). Использование суперпозиций функций. Уравнения тождества. Уравнения, при решении которых используются прогрессии. Уравнения с двумя неизвестными. Показательно-степенные уравнения.

Задачи с параметрами

Аналитический подход. Выписывание ответа (описание множеств решений) в задачах с параметрами. Рациональные задачи с параметрами. Запись ответов. Иррациональные задачи с параметрами. «Собирание» ответов. Задачи с модулями и параметрами. Критические значения параметра. Метод интервалов в неравенствах с параметрами. Замена в задачах с параметрами. Метод разложения в задачах с параметрами. Разложение с помощью разрешения относительно параметра. Системы с параметрами. Применение производной при анализе и решении задач с параметрами.

Планируемые результаты

Изучение элективного курса в основной школе даёт возможность обучающимся

достичь следующих результатов развития:

1) в личностном направлении:

- определять круг собственных интересов
- объяснять определение алгоритма решения задачи, способа представления решения
- самостоятельно конструировать деятельность
- развивать умение адекватно оценивать себя
- повысить личную уверенность при решении слабоструктурированных задач

2) в метапредметном направлении:

- сформированности первоначальных представлений о математике как универсальном языке науки и техники, средстве моделирования явлений и процессов;
- способности наблюдать, сопоставлять факты, выполнять аналитико-синтетическую деятельность,
- умение выдвигать гипотезы при решении учебно-познавательных задач, понимать необходимость их проверки, обоснования;
- умения выстраивать цепочку сложных доказательных рассуждений, опираясь на изученные понятия и их свойства;
- понимания необходимости применять приемы самоконтроля при решении математических задач;
- стремления продуктивно организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками
- сформированности основы учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ-компетентности);
- способности видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни

3) в предметном направлении:

- умения работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- характеризовать способы решения задач;
- ориентироваться среди различных типов задач.
- знать методы решения неравенств и систем уравнений;
- знать основные приёмы и методы решения: уравнений и неравенств с модулем и параметрами; линейных, квадратных уравнений и неравенств с параметрами; иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических уравнений и неравенств, в том числе с параметрами.
- применять изученные методы и приемы при решении уравнений и неравенств;
- проводить исследования при решении уравнений и неравенств с параметрами

По окончании элективного курса ученик научится (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне).

Ученик научится:

- использовать основные методы для решения уравнений и неравенств;
- использовать понятия и умения, связанные с уравнениями в ходе решения математических задач и задач из смежных предметов

Ученик получит возможность научиться:

- научиться использовать нестандартные приёмы решения уравнений и неравенств
- понимать существо понятия алгоритма
- понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций.
- уверенно применять аппарат уравнений для решения разнообразных задач из математики

№п/п	Наименование разделов и тем	Количество часов
1.	Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах	3
2.	Методы решения неравенств	4
3.	Методы решения систем уравнений	3
4.	Уравнения с модулем	4
5.	Неравенства с модулем	4
6.	Уравнения с параметрами	4
7.	Неравенства с параметрами	3
8.	Решение уравнений и неравенств методом рационализации	9
9.	Тригонометрические уравнения и неравенства	6
10.	Иррациональные уравнения и неравенства	5
11.	Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	5
12.	Нестандартные методы решения уравнений и неравенств	5
13.	Задачи с параметрами	8
14.	Решение уравнений и неравенств	5

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ЭЛЕКТИВНОМУ КУРСУ

1. Уравнения, множеством решений которых является область определения уравнения

К таким уравнениям будем относить уравнения-тождества (уравнения-формулы).
Примеры уравнений-тождеств:

$$1.1 \quad x^3 \cdot x^{-3} = 1$$

$$1.2 \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$1.3 \quad \log_x x = 1$$

$$1.4 \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

$$1.5 \quad \sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$$

$$1.6 \quad \frac{x}{x} = 1$$

Теоретической основой решения уравнений-тождеств являются:

- формулы алгебры и тригонометрии;
- понятия области определения и множества решения уравнения;
- области определения элементарных функций.

Под областью определения уравнения (ООУ), как известно, понимают общую часть областей определения функций, входящих в уравнение. Под множеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ (МРУ) понимают множество значений переменной x , при которых получается верное числовое равенство.

Составим таблицу областей определения элементарных функций.

Элементарные функции и их области определения

№	Функция	ООФ
1	Линейная функция $y = kx + b$, где k и b – любые действительные числа.	$x \in R$
2	Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$, где a , b и c – любые действительные числа, $a \neq 0$.	$x \in R$
3	Степенная функция $y = x^p$	Если $p \in N$, то $x \in R$ Если $p \in Z, p < 0$, то $x \neq 0$ Если $p > 0, p \in R$, то $x \geq 0$ Если $p < 0, p \in R$, то $x > 0$
4	Показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$	$x \in R$
5	Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$	$x > 0$
6	Тригонометрические функции	
	$y = \sin x$	$x \in R$
	$y = \cos x$	$x \in R$
	$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

	$y = ctgx$	$x \neq \pi k, k \in Z$
7	Обратные тригонометрические функции	
	$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$
	$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$
	$y = \arctg x$	$x \in R$
	$y = arcctg x$	$x \in R$
8	Дробно-рациональная функция $y = \frac{k_1 x + b_1}{k_2 x + b_2}$	$x \neq -\frac{b_2}{k_2}$

Решим примеры 1.1 – 1.6.

Уравнение	ООУ	МРУ	Опорные знания
$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 1$	$x > 0$	$x > 0$	Область определения степенной функции с действительным показателем
$\sqrt{x^2} = x $	$x \in R$	$x \in R$	Область определения степенной функции и понятие модуля числа
$\log_x x = 1$	$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	Понятие логарифмической функции и её область определения
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$	$x \neq \pi k, k \in Z$	$x \neq \pi k, k \in Z$	Области определения функции $y = ctgx$ и дробно-рациональной функции
$\frac{x}{x} = 1$	$x \neq 0$	$x \neq 0$	Область определения дробно-рациональной функции

Приступая к обучению решению уравнений рассматриваемого вида, следует учить учащихся:

- 1) выделять «опасные операции» над переменной x , содержащиеся в записи уравнения (под «опасными операциями» понимаем те операции, которые требуют ограничений: извлечение корня чётной степени, деление на выражение с переменной, логарифмирование, возведение в степень, «взятие» тангенса, котангенса, арксинуса и арккосинуса);

- 2) составлять и решать систему ограничений.

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения:

$$1.7 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$1.8 \frac{1}{x} = x$$

$$1.9 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$1.10 \sin(\arcsin x) = x$$

$$1.11 \sin^2 \sqrt{1-x^2} + \cos^2 \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$1.12 x^{2k} \cdot x^{-2k} = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$1.13 x^e \cdot x^{-e} = 1$$

$$1.14 x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = 1$$

$$1.15 \log_{0,1}(x+4) + \log_{0,1}(x-4) = \log_{0,1}(x^2-16)$$

$$1.16 (\sqrt{-\cos x})^2 = -\cos x$$

$$1.17 \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^4 x} = |\operatorname{ctg} x|$$

$$1.18 \log_2 x^6 = 6 \log_2 |x|$$

$$1.19 \frac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$1.20 \sqrt{x-4} + \sqrt{2-x} = 1$$

$$1.21 (x^2-3x-4)^2 (x^2-3x-4)^2 = 1$$

$$1.22 \log_3(x+1) - \log_3(-x-1) = \log_3 \frac{x+1}{-x-1}$$

ОТВЕТЫ:

$$1.7 x \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1.8 x \neq 0$$

$$1.9 x \in \mathbb{R}$$

$$1.10 |x| \leq 1$$

$$1.11 |x| \leq 1$$

$$1.12 x \neq 0$$

$$1.13 x > 0$$

$$1.14 x > 0$$

$$1.15 x > 4$$

$$1.16 \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$1.17 x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1.18 x \neq 0$$

$$1.19 x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1.20 x \in \emptyset$$

$$1.21 x \neq -1, \quad x \neq 4$$

$$1.22 x \in \emptyset$$

2. Уравнения, при решении которых используются прогрессии

Обобщение и систематизацию теоретического материала по арифметической и геометрической прогрессиям представим в виде таблицы. Таблица состоит из 3 столбцов и включает в себя следующие единицы рассматриваемой теории:

- определения последовательностей,
- формулы n -го члена,
- формулы суммы n первых членов,
- характеристические свойства прогрессий.

Теория прогрессий

Прогрессии	Арифметическая	Геометрическая	
1) Определение понятий	-числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d. Число d называется <i>разностью</i> арифметической прогрессии. Обозначается: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \text{ где } a_{n+1} = a_n + d.$	-числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю. Число q называется <i>знаменателем</i> геом. прогрессии. Обозначается: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, где $b_{n+1} = b_n * q$.	Если модуль знаменателя q <i>меньше единицы</i>, то прогрессия называется бесконечно убывающей. Т.е. при $q < 1$.
2) Примеры прогрессий	1). 1, 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n. 2). 1, 3, 5, 7, 9, 11. 3). 7, 7, 7, 7, 7. 4). $1/3, 2/3, 1, 4/3, \dots$	1) 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n 2) -3, 9, -27, 81, -243, ... 3) 2, 7, 24.5, 85.75. 4) 5, 5, 5, 5, ...	1) 2, 1, $1/2, 1/4, \dots$ 2) $1, 2/3, 4/9, \dots$ 3) -16, -8, -4, ... 4) 100, -10, 1.
3) Алгоритмы распознавания прогрессий	Для того, чтобы выяснить является ли последовательность:		
	♦ <i>арифметической прогрессией</i>, 1) Найти разность d между первым и вторым членами последовательности. 2) Проверить, каждый ли ее элемент, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d. 3) Сделать вывод.	♦ <i>геометрической</i> необходимо: 1) Найти частное q от деления первого члена на второй последовательности. 2) Проверить, каждый ли ее элемент, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q. 3) Сделать вывод.	♦ <i>бесконечно убывающей геом. прогрессией</i> необходимо проверить что: 1) данная последовательность имеет бесконечное число членов; 2) последовательность -геометрическая, 3) что $ q < 1$.
4) Характеристическое свойство прогрессий	Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен <i>среднему арифметическому</i> двух соседних с ним членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \dots(1)\dots$	Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен <i>среднему геометрическому</i> двух соседних с ним членов: $ b_n = \sqrt{b_{n-1} * b_{n+1}} \quad \dots(2)\dots$	

5) Типы задач на применение свойства прогрессий	1) Даны два числа: 11 и 35. Какое число, лежащее между ними, нужно выбрать, чтобы полученные три числа составляли арифметическую прогрессию?	1) Какое число нужно поместить между числами 3 и 243, чтобы три числа составляли геометрическую прогрессию?
6) Алгоритмы решения задач на характер свойства	Для того, чтобы <u>найти элемент a_2, лежащий между данными элементами a_1 и a_3</u> , такой что элементы a_1, a_2, a_3 составляют арифметическую прогрессию, необходимо: 1) Подставить известные данные в формулу (1), 2) Вычислить искомый элемент. 3) Сделать вывод.	Для того, чтобы <u>найти число, располагающееся между известными числами b_1 и b_3</u> , такое что получившиеся три числа будут составлять геометрическую прогрессию b_1, b_2, b_3 необходимо: 1) Подставить известные данные в формулу (2), 2) Вычислить, то искомое число. 3) Сделать вывод.
7) Формула n -го члена	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
8) Типы задач на применение формулы n -го члена	1). Дана арифметическая прогрессия 13, 11, 9, Найти ее 31 –й член.	1). Дана геометрическая прогрессия $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Найти ее 9 –й член.
	2). Найти первый член арифметической прогрессии , если $d = -3, a_{11} = 20$.	2). Найти первый член геометрической прогрессии, если $q=2, b_4=32$.
	3). Найти разность арифметической прогрессии , если $a_1=7, a_{16}=67$.	3). Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1=2, b_5=162$.
	4). Число -22 является членом арифметической прогрессии 44 , 38, 32,... . Найти номер этого члена.	4). Число 162 является членом геометрической прогрессии 2, 6 , 18 , Найти номер этого члена.

9) Алгоритмы решения задач на применение формулы n-го члена	Для того, чтобы <u>найти</u> a_n (или a_1, или n, или d) <u>данной прогрессии</u> необходимо: 1) Найти или указать: • первый член a_1, разность d и номер искомого элемента n (или $(d, a_n$ и $n)$, или $(a_1 d)$, или $(a_1, a_n$ и $n)$). 2) Подставить найденные значения в формулу n-го члена. 3) Найти значение a_n (или a_1, или n, или d). 4) Записать ответ.	Для того, чтобы <u>найти</u> b_n (или b_1, или n, или q) <u>данной прогрессии</u> необходимо: 1) Найти или указать: • первый член b_1, знаменатель q и номер искомого элемента данной прогрессии n (или $(q, b_n$ и $n)$, или $(b_1 q)$, или $(b_1, b_n$ и $n)$). 2) Подставить найденные значения в формулу n-го члена. 3) Найти значение b_n (или b_1, или n, или q). 4) Записать ответ.	
10) Сумма n первых членов прогрессий	$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$ $= n \cdot (a_1 + a_n) / 2$ или $S_n = n \cdot [2a_1 + d(n-1)] / 2$	$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n .$ $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$	$S = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ $S = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} .$
11) Типы задач на применение формулы суммы n первых членов	1) Найти сумму девяти первых членов арифметической прогрессии 9, 13, 17, ... 2) Найти a_{14} и d арифметической прогрессии, если $a_1=10$, $S_{14}=1050$. 3) Найти a_1 арифметической прогрессии, если $a_7=21$, $S_7=205$. 4) Найти n в арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, ..., если $S_n = 63$.	1) Найти сумму первых семи членов геометр. прогрессии 5, 10, 20, ... 2) Найти b_8 геометрической прогрессии, если $S_8 = 85$, $q = -2$. 3) Найти b_1 геометрической прогрессии, если $S_7 = 635$, $q = 2$. 4) Найти n в геометрической прогрессии 7, 21, 63, ..., если $S_n = 847$.	1) Найти сумму прогрессии -25, -5, -1, ... 2) Найти b_1 член, если $q = 1/2$, $S = 320$. 3) Найти q бесконечно убыв. геом. прогрессии, если $b_1 = 40$, $S = 60$.

12) Алгоритм решения задач на применение формулы суммы n первых членов прогрессий	Для того, чтобы <u>найти сумму n первых членов S_n</u> прогрессии (или первый член a_1, или n й член a_n, или ее разность d, или количество членов n) необходимо: 1) Найти или указать: первый член a_1, разность d и n – количество членов (или (S_n, n, d), или (a_1, S_n, n), или (a_1, n, S_n), или (a_1, d, S_n)). 2) Подставить найденные значения в формулу суммы n первых членов прогрессии. 3) Решить полученное уравнение, относительно неизвестного. 4) Записать ответ.	Для того, чтобы <u>найти сумму n первых членов S_n</u> прогрессии (или первый член b_1, или n й член b_n, или ее знаменатель q, или количество членов n) необходимо: 1) Найти или указать: первый член b_1, знаменатель q и n – количество членов (или (q, S_n, n), или (q, S_n, n, b_1), или (b_1, S_n, n), или (b_1, S_n, q)). 2) Подставить найденные значения в формулу суммы n первых членов прогрессии. 3) Решить полученное уравнение, относительно неизвестного. 4) Записать ответ.	Для того, чтобы <u>найти сумму S</u> (или b_1, или q) необходимо: 1) Найти или указать: b_1 и q (или (S, q), или (S, b_1)). 2) подставить найденные значения в формулу суммы. 3) Решить полученное уравнение. 4) Записать ответ.
---	--	---	--

Рассмотрим примеры.

Рациональные уравнения

Пример 2.1 Решить уравнение:

$$2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{13}{6}, \text{ где } |x| < 1.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(2x + 1) + (x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots) = \frac{13}{6}.$$

Во второй скобке – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $g = -x$.

$$\begin{aligned}
 2x + 1 + \frac{x^2}{1 - (-x)} &= \frac{13}{6} & \Rightarrow & & 2x + 1 + \frac{x^2}{1 + x} &= \frac{13}{6} \\
 12x + 12x^2 + 6x^2 + 6x + 6 &= 13 + 13x & \Rightarrow & & 18x^2 + 5x - 7 &= 0 \\
 x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 504}}{36} = \frac{-5 \pm 23}{36} \\
 x_1 &= \frac{1}{2}, & x_2 &= -\frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{7}{9}$.

Пример 2.2. Найти все решения уравнения:

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = 3,5 \quad |x| < 1$$

Решение.

Заменим данное уравнение ему равносильным

$$-9x^2 - 9x + 2 = 0, \text{ т.к. } x + x^2 + \dots = \frac{x}{1-x} \text{ по формуле убывающей}$$

прогрессии. Решим полученное уравнение

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}.$$

Найденные значения x удовлетворяют условию $|x| < 1$.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}. x_1 = \frac{2}{3}.$$

Пример 2.3. Найти все решения уравнения:

$$(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + \dots + (x^2 + 20x + 39) = 4500.$$

Решение.

Левая часть уравнения – сумма арифметической прогрессии, в которой $a_1 = x^2 + x + 1$, $d = x + 2$, $a_n = x^2 + 20x + 39$.

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, найдём число слагаемых в левой части исходного уравнения:

$$x^2 + 20x + 39 = x^2 + x + 1 + (x + 2)n - x - 2;$$

$$n = \frac{20x + 40}{x + 2} = 20.$$

Тогда по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ преобразуем левую часть исходного уравнения и получим:

$$\frac{x^2 + x + 1 + x^2 + 20x + 39}{2} \cdot 20 = 4500;$$

$$2x^2 + 21x + 40 = 450 \Rightarrow 2x^2 + 21x - 410 = 0;$$

$$x_1 = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 3280}}{4} = \frac{-21 \pm 61}{4};$$

$$x_1 = -20,5; \quad x_2 = 10.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -20,5; \quad x_2 = 10.$$

Пример 2.4. Найти все решения уравнения $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3$.

Решение.

Левая часть уравнения – сумма арифметической прогрессии, в которой

$$a_1 = \frac{x-1}{x}, \quad d = -\frac{1}{x}, \quad a_n = \frac{1}{x}.$$

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём число слагаемых в левой части исходного уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{x-2}{x} - \frac{1}{x}n + \frac{1}{x}; \\ n &= \frac{x-1}{x} \cdot x; \\ n &= x-1.\end{aligned}$$

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$ преобразуем левую часть исходного уравнения.

$$S = \frac{\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}}{2}x(x-1);$$

$$\frac{x-1+1}{2x}(x-1)=3 \quad \Rightarrow \quad x-1=6 \quad \Rightarrow \quad x=7$$

Ответ: $x=7$.

Пример 2.5. Найти все решения уравнения $x-1+x-3+\dots+x-27=70$.

Решение.

В левой части уравнения – сумма членов арифметической прогрессии, где $a_1 = x-1$, $a_n = x-27$.

Найдём разность данной прогрессии $d = x-3 - x+1 = -2$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём n :

$$\begin{aligned}x-27 &= -1 - 2 \cdot (n-1); \\ -26 &= -2 \cdot (n-1); \\ n &= 14.\end{aligned}$$

По формуле суммы n -первых членов арифметической прогрессии, найдём сумму для данной прогрессии:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} \cdot (x-1 + x-27) \cdot 14 = (x-14) \cdot 14 = 70; \\ x-14 &= 5; \\ x &= 19.\end{aligned}$$

Ответ: $x=19$.

Пример 2.6. Найти все решения уравнения $81 \cdot 0,(5)^{x-1} = 25$.

Решение.

Представим $0,(5)$ в виде обыкновенной дроби, используя формулу $S = \frac{b_1}{1-q}$, где $|q| < 1$.

$$0,(5) = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 0,5 \\
 b_2 &= 0,05 \\
 q &= \frac{1}{10}
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 S = \frac{0,5}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

$$\text{имеем } 81 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{x-1} = \frac{25}{81} \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3.$$

Ответ: $x = 3$.

Показательные и логарифмические уравнения

Пример 2.7. Решить уравнение

$$3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 45,5 + 22,75 + 11,375 + \dots$$

Решение.

Данное уравнение является показательным, причём в правой части записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 45,5$ и

$$q = \frac{22,75}{45,5} = 0,5.$$

1) Найдём сумму данной прогрессии по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии: $S = \frac{45,5}{1 - 0,5} = 91$.

2) Запишем уравнение в следующем виде $3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 91$ или $3^{x-9} \cdot (3^4 + 3^2 + 1) = 91$, произведём необходимые вычисления и получим, что $3^{x-9} \cdot 91 = 91$ или $3^{x-9} = 1$, или $3^{x-9} = 3^0$, отсюда $x - 9 = 0$, или $x = 9$.

Ответ: $x = 9$.

Пример 2.8. Решить уравнение $\lg x + \lg x^2 + \lg x^4 + \dots + \lg x^{256} = 5$.

Решение.

Заметим, что в левой части уравнения – сумма десятичных логарифмов.

1) ООУ: $x > 0$.

2) Пользуясь свойством логарифма, преобразуем данное уравнение:
 $\lg x + 2 \cdot \lg x + 4 \cdot \lg x + \dots + 256 \lg x = 5$.

3) Заметим, что в левой части уравнения записана сумма геометрической прогрессии, у которой $b_1 = \lg x$, $q = 2$; используя формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, найдём количество n членов данной прогрессии:

$$\lg x^{256} = \lg x \cdot 2^{n-1}, \text{ т.е. } \lg x^{256} = \lg x^{2^{n-1}}, \text{ отсюда } x^{256} = x^{2^{n-1}}, \text{ тогда } 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow 9 = n-1, \text{ следовательно, } n = 9.$$

4) Применим формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ для заданной суммы:

$$\lg x \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 5, \text{ тогда } \lg x = \frac{5}{511}, \text{ следовательно,}$$

$$x = 10^{\frac{5}{511}} = 10^{0,0098} = 1,023, \text{ что удовлетворяет ООУ.}$$

Ответ: $x = 1,023$.

Пример 2.9. Найти x , если числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Решение.

Т.к. числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ образуют арифметическую прогрессию, то для них выполняется характеристическое свойство, т.е.

$$2 \cdot \lg(2^x - 1) = \lg 2 + \lg(2^x + 3).$$

1) Решим полученное логарифмическое уравнение.

1.1) ОУУ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2^x - 1 > 0, \\ 2^x + 3 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2^x > 1, \\ 2^x > -3; \end{cases} \Rightarrow x > 0.$$

1.2) $(2^x - 1)^2 = 2 \cdot (2^x + 3)$, раскроем скобки

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 6 \Rightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 = 0,$$

обозначим $2^x = t$, причём $t > 0$, тогда

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3.$$

Следовательно, $t_1 = 5$, $t_2 = -1$.

$t_2 = -1 < 0$, не удовлетворяет условию $t > 0$.

$$\text{Значит } 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5.$$

2) $x = \log_2 5$ – полученное значение удовлетворяет ООУ,

следовательно, можно записать ответ.

Ответ: $x = \log_2 5$.

Тригонометрические уравнения

Пример 2.10. Показать, что значения функции $tg\alpha$ углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

Решение.

Необходимо показать, что значения функции $tg\alpha$ углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

- 1) Найдём значения функции $tg\alpha$ при значениях $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

- 2) Для того чтобы проверить является ли последовательность значений функции $tg\alpha$ возрастающей геометрической прогрессией, проверим выполнимость характеристического свойства:

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sqrt{3},$$

$1 = \frac{3}{3}$ или $1 = 1$, действительно данная последовательность является геометрической прогрессией.

- 3) Т.к. $\frac{3}{\sqrt{3}} > 1$, то данная геометрическая прогрессия является возрастающей.

Ответ: значения функции $tg\alpha$ углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

Пример 2.11. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству

$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, при которых числа $2^{\cos\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$, $\left(2^5\right)^{5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

Решение.

Необходимо найти все значения x , удовлетворяющие неравенству

$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, при которых числа $2^{\cos\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$, $\left(2^5\right)^{5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ в

указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

1) Если данные числа составляют геометрическую прогрессию, то для них должно выполняться характеристическое свойство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2^{\cos\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right)} \cdot \left(2^5\right)^{5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned} 2^{2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} &= 2^{\cos\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right)} \cdot 2^{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ -2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ -2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= 2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right), \\ \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 - \sin 2x) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ 1 - \sin 2x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

3) Остаётся проверить условие задачи, что $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$,

очевидно что серия $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ не удовлетворяет этому равенству.

4) Для серии $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}$ имеем $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi k}{3} > 0$, при

$k = 3m + 1$, что и даёт решение $x = \frac{7\pi}{12} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{7\pi}{12} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.12. Решить уравнение

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^n x + \dots}{1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + (-1)^n \operatorname{tg}^n x + \dots} = 1 + \sin 2x, \quad \text{где } |\operatorname{tg} x| < 1.$$

Решение.

Дано тригонометрическое уравнение, причём и в числителе, и в знаменателе левой части уравнения записана сумма бесконечно убывающей прогрессии.

1) ООУ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$

2) Упростим числитель и знаменатель, используя формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии $S = \frac{b_1}{(1-q)}$, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{(1 - \operatorname{tg} x)}{1}} &= 1 + \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x \Rightarrow \\ (1 + \operatorname{tg} x) & \\ \Rightarrow \quad \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - (\cos x + \sin x)^2 &= 0, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ \frac{1}{\cos x - \sin x} - (\cos x + \sin x) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первое уравнение не имеет корней, т.к. по условию $|\operatorname{tg} x| < 1$, а второе равносильно уравнению $\cos 2x = 1, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

3) Полученное решение удовлетворяет ООУ.

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2.13. Даны три последовательных члена арифметической прогрессии $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$. Найти x .

Решение.

1) Так как данные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, то для них выполняется характеристическое свойство: $2 \cdot \sin 2x = \sin x + \sin 3x$.

2) Решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin 2x &= \sin x + \sin 3x \Rightarrow 2 \cdot \sin 2x = 2 \cdot \sin \left(\frac{x + 3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x - 3x}{2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin 2x &= \sin 2x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 2x \cdot (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi n, \\ x = 2\pi k; \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, \\ x = 2\pi k; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
Решить уравнения 1-4, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-g}$, где $g < 1$	
1. $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{3} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$	$x = 2$.
2. $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = 12 + 8 + \frac{16}{3} + \dots$	$x = 2$.
3. $2^{x^2-2x+5} = 8 + 4 + 2 + \dots$	$x = -1$.
4. $(0,5)^{x^2-5,5} \cdot \sqrt{0,5} = 16 + 8 + 4 + \dots$	$x = 0$.
Решить уравнения	
5. $\frac{(x-1)}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \dots + \frac{x-3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{15}$	$x = 15$.
6. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 2$	$x = \frac{1}{2}$.
7. $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155$	$x = 1$.
8. $\frac{2x^2+2}{x} + 2x - 2x^3 + 2x^5 - 2x^7 + \dots = \frac{29}{5}$	$x = \frac{1}{2}$.
9. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \dots \cdot 5^{2x} = 0,04^{28}$	$x = 7$.
10. $\log_k x + \log_k \frac{1}{2} x + \dots + \log_k \frac{1}{k} x = \frac{k+1}{2}$, где $k \in \mathbb{N}$	$x = k^{\frac{1}{k}}$, при $k > 0, k \neq 1$
11. При каких значениях x и y последовательность t_1, t_2, t_3 , где $t_1 = 8^{x-\log_2 y}$, $t_2 = 2^{x-\log_2 y}$, $t_3 = 5 \cdot y$, является одновременно арифметической и геометрической прогрессией.	$x = \frac{1}{2} \log_2 5$, $y = 5^{-\frac{1}{4}}$.
12. Определить при каких значениях x числа a_1, a_2, a_3 , взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию: $a_1 = \lg 2$, $a_2 = \lg(3^x - 3)$, $a_3 = \lg(3^x + 9)$	$x = 2$.
13. Три числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти $\frac{\log_b 3 \cdot \left(\log_a^2 c - \log_c a^2 \right)}{\log_a 9 - 2 \cdot \log_c 3}$	$\frac{1}{2}$.
14. Найти все значения x , при которых числа $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3 \cos\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}$, $5^{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.	$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m$, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, где $k, m \in \mathbb{Z}$

15. Решить уравнение $\frac{1 + \sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x + \dots}{1 - \sin x + \sin^2 x + \dots + (-1)^n \sin^n x + \dots} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \text{ где } \sin x \neq 1$	$x = \pi n, n \in Z.$
16. При каких значениях α числа $2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \sin \alpha, 6 \cdot \sin(\pi - \alpha)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?	$\alpha = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$
17. Числа $1 - \cos 2x, \cos x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin(-2x)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами $k, k+1, k+2$ соответственно. Найти все значения x и k , если известно, что 15-й член этой прогрессии равен $\frac{27}{8}$.	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$ $k = 17$
18. Найти положительные значения a , для которых все различные неотрицательные x , удовлетворяющие уравнению $\cos((8a-3) \cdot x) = \cos((14a+5) \cdot x)$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.	$a \in \left\{ \frac{1}{30}, \frac{2}{19}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{11}{2} \right\}.$

3. Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций

Теоретической базой решения уравнений с использованием ограниченности функций являются понятие ограниченности функции, сопутствующие понятия и специальная теорема.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на промежутке J , если существуют числа A и B такие, что для всех значений $x \in J$ справедливо неравенство $A \leq f(x) \leq B$. (*)

Из этого определения следует, что если функция $y = f(x)$ на промежутке J принимает своё наименьшее значение m и наибольшее значение M , то она ограничена на промежутке J , для этого достаточно положить $A = m, B = M$.

Функции, не являющиеся ограниченными на промежутке J , называются неограниченными. Иногда функция $y = f(x)$ на промежутке J удовлетворяет только одному из неравенств (*). В связи с этим введем ещё одно определение.

Определение 2. Если существует число A , такое, что для всех $x \in J$ выполняется неравенство $f(x) \geq A$, то функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу на промежутке J .

Если же существует число B , такое, что для всех $x \in J$ выполняется неравенство $f(x) \leq B$, то функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху.

Примеры.

1) $y = \cos x$ - функция ограниченная, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2) $y = |x|$ - функция ограниченная снизу, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $|x| \geq 0$.

3) $y = -x^2 + 2 - 6x$ - функция ограниченная сверху, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $y \leq 11$. (Дана квадратичная функция с коэффициентом $a = -1 < 0$ и абсциссой вершины $x_0 = -\frac{-6}{-2} = -3$, при $x \in R$ $y \leq y(x_0)$, где $y(x_0) = -9 + 2 + 18 = 11$).

Исследуйте на ограниченность следующие функции.

1	$y = \sin 2x $	6	$y = \cos^2 \frac{x}{2}$
2	$y = \log_3(x^2 - 4x + 7)$	7	$y = 4 - \sin x$
3	$y = \arcsin x$	8	$y = \frac{1}{4} \sin x \cos x$
4	$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	9	$y = \sqrt{tg^2 x + 3}$
5	$y = \sqrt{x-1}$	10	$y = \left \log_{\frac{1}{2}} x \right $

Ответы:

Обучая учащихся понятию ограниченности функции:

1	$0 \leq y \leq 1$	6	$0 \leq y \leq 1$
2	$y \geq 1$	7	$3 \leq y \leq 5$
3	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	8	$\frac{1}{2} \leq y \leq 2$. Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$, значит $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2} \sin 2x} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.
4	$y \geq 2$. Воспользоваться свойством $t + \frac{1}{t} \geq 2, t > 0$	9	$y \geq \sqrt{3}$
5	$y \geq 0$	10	$y \geq 0$

1) Составить совместными усилиями обобщающую таблицу множеств значений функций (МЗФ):

Функция	ООФ	МЗФ
$y = kx + b$	$x \in R$	$y \in R$, если $k \neq 0$ $y = b$, если $k = 0$
$y = a^2 x + bx + c$	$x \in R$	$a > 0, y \geq y(x_0), x_0 = -\frac{b}{2a}$ $a < 0, y \leq y(x_0), x_0 = -\frac{b}{2a}$

$y = \frac{k}{x}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = a^x$	$x \in R$	$y > 0$
$y = \log_a x$	$x > 0$	$y \in R$
$y = \sin x$	$x \in R$	$y \in [-1; 1]$
$y = \cos x$	$x \in R$	$y \in [-1; 1]$
$y = \lg x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	$y \in R$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k, k \in Z$	$y \in R$
$y = \arcsin x$	$x \in [-1; 1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$x \in [-1; 1]$	$y \in [0; \pi]$
$y = \operatorname{arctg} x$	$x \in R$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x$	$x \in R$	$y \in (0; \pi)$

2) Отработать умения пользоваться ею и умения находить множества значений сложных функций: $y = f(|x|)$; $y = \sqrt{f(x)}$; $y = \log_a f(x)$; $y = a^{f(x)}$; $y = f(\sin x)$ и т.д.

Введём специальную **теорему**, используемую при решении некоторых нестандартных уравнений.

Если функция $f(x)$ на промежутке X ограничена сверху, причём её наибольшее значение равно A , а другая функция $g(x)$ на этом промежутке ограничена снизу, причём её наименьшее значение равно B , то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B. \end{cases}$$

Из теоремы следует **алгоритм решения уравнений методом оценки** или методом использования экстремальных значений функций:

- 1) найти область определения уравнения;
- 2) оценить левую и правую части данного уравнения;
- 3) если функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, удовлетворяют сформулированной теореме, то вместо данного уравнения решать соответствующую систему уравнений..

Рассмотрим примеры уравнений, решаемых с использованием метода оценки.

Пример 3.1. Решить уравнение $4\cos x = 4 + x^2$.

Решение

Оценим левую и правую части уравнения:

$$f(x) = 4\cos x, \quad -4 \leq 4\cos x \leq 4.$$

$$g(x) = 4 + x^2, \quad 4 + x^2 \geq 4.$$

Так как левая и правая части уравнения удовлетворяют условию теоремы, то данное уравнение можно заменить системой:
$$\begin{cases} 4\cos x = 4 \\ 4 + x^2 = 4. \end{cases}$$
 Из второго уравнения

находим $x = 0$. Подставив $x = 0$ в первое уравнение, получаем верное числовое равенство, следовательно, $x = 0$ - корень данного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Пример 3.2. Решить уравнение $e^{x^2} + 4 = \sqrt[6]{64 - x^4} + \log_3(27 - x^2)$.

Решение

Оценим левую и правую части уравнения:

$$f(x) = e^{x^2} + 4, \text{ т.к. } e^{x^2} \geq 1, \text{ то } e^{x^2} + 4 \geq 5;$$

$$g(x) = \sqrt[6]{64 - x^4} + \log_3(27 - x^2), \text{ т.к. } 0 \leq \sqrt[6]{64 - x^4} \leq 2, \quad 27 - x^2 \leq 27, \\ \log_3(27 - x^2) \leq 3, \text{ то } g(x) \leq 5.$$

Так как условие теоремы выполняется, заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений
$$\begin{cases} e^{x^2} + 4 = 5, \\ \sqrt[6]{64 - x^4} + \log_3(27 - x^2) = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ 2 + 3 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 3.3. Решить уравнение $\sin^2 2x + \cos^6 \frac{x}{2} + 6 \sin 5x = 9$.

Решение

Так как левая часть уравнения принимает значения не больше 8, а правая часть равна 9, то данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример 3.4. Решить уравнение $2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

Решение

$$\text{Данное уравнение равносильно системе: } \begin{cases} 2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2, \\ 2^x + 2^{-x} = 2. \end{cases} \text{ При оценке}$$

выражения $2^x + 2^{-x}$ воспользовались неравенством $t + \frac{1}{t} \geq 2$, где $t = 2^x, t > 0$,

которое можно доказать. Из второго уравнения системы следует, что $x = 0$, которое удовлетворяет первому уравнению.

Ответ: $x = 0$.

Анализируя решённые примеры, можно сделать вывод, о том, что **метод оценки** можно применять:

1. если в одной части уравнения функция, ограниченная сверху, а в другой, ограниченная снизу (примеры: 3.1; 3.2; 3.4);
2. если в уравнении содержатся функции разного вида (примеры: 3.1; 3.2; 3.4);
3. если в одной части уравнения ограниченная функция, а в другой – константа (пример 3.3).

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $3^{\sin \sqrt{x}} = \cos x $	$x = 0$. Данное уравнение равносильно

	системе $\begin{cases} 3^{\sin \sqrt{x}} = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$
2. $\sin \frac{x}{3} - \cos 6x = 2$	$x = \frac{3}{2}\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Свести исходное уравнение к системе: $\begin{cases} \sin \frac{x}{3} = 1, \\ \cos 6x = -1. \end{cases}$
3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin 3x = 1$	$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Свести исходное уравнение к совокупности систем.
4. $\log_2(x^2 + 4) - \log_2 x = 4x - x^2 - 2$	$x = 2$. Заменив в области определения уравнения ($x > 0$) данное уравнение на равносильное $\log_2\left(x + \frac{4}{x}\right) = 4x - x^2 - 2$, оценим левую и правую части полученного уравнения. Т.к. $x + \frac{4}{x} \geq 4$, то $f(x) = \log_2\left(x + \frac{4}{x}\right) \geq 2$; $4x - x^2 - 2 \leq 2$.
5. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 3 - 2x$	$x = 0$. При $x \geq 0$ левая часть уравнения не меньше 3, а правая не больше 3.
6. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2$	$x \in \emptyset$. При $x \geq 0$ левая часть уравнения не меньше 3, а правая часть равна 2.
7. $\cos \pi x = x^2 - 4x + 5$	$x = 2$. Левая часть уравнения не больше 1, а правая не меньше 1.
8. $3^{ x } = \cos \frac{x}{3}$	$x = 0$. Левая часть уравнения не меньше 1, а $-1 \leq \cos \frac{x}{3} \leq 1$.
9. $2 \cos \frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}$	$x = 0$.
10. $3^{\sin \sqrt{x}} = \cos x $	$x = 0$.
11. $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. $\sin^5 x + \cos^5 x \leq 1, 2 - \sin^4 x \geq 1$ из чего следует, что данное уравнение

	равносильно системе $\begin{cases} \sin^5 x + \cos^5 x = 1 \\ 2 - \sin^4 x = 1 \end{cases}$
12. $\cos^{10} x + \sin^{50} x = 1$	$x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$. Воспользоваться свойством чётных степеней $\sin x$ и $\cos x$ $\cos^{10} x \leq \cos^2 x$, $\sin^{50} x \leq \sin^2 x$ и теоремой о сложении неравенств одинакового смысла и перейти к совокупности систем простейших уравнений.
13. $\sin^4 2x + \cos^8 \frac{2}{3}x + 7 \sin x = 11$	нет решения. Оценить каждое слагаемое левой части уравнения и сложить неравенства одинакового смысла.
14. $\cos \frac{\pi x}{6} = -x^2 + 12x - 37$	$x = 6$. Применить метод оценки.
15. $8 \sin \frac{\pi}{10} x = x^2 - 10x + 33$	$x = 5$.
16. $2 \log_2(4x - x^2 - 2) = 2$	Применить метод оценки. $x = 2$.
17. $14^{1-x} = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$	$x = 1$. Применить метод оценки.
18. $\sqrt{3y^2 + 6y + 7} + \sqrt{5y^2 + 10y + 14} = 4 - 2y - y^2$	$x = -1$. При оценке левой и правой частей воспользоваться выделением полного квадрата.
19. $3 + (x - \pi)^2 = 1 - 2 \cos x$	$x = \pi$.
20. $\sqrt[3]{\log_5(x^2 - 3x + 3) + 1} = \cos^4((x - 2) \cdot \sin(2x + 1))$	$x = 2$. Применить метод оценки.

4. Уравнения, при решении которых используется монотонность функций

Прежде, чем рассматривать виды уравнений, решаемых указанным способом, рассмотрим понятие монотонности функции и специальную теорему, лежащую в основе способа.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (неубывающей) на множестве X , если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$).

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется убывающей (невозрастающей) на множестве X , если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Графический смысл введенных понятий

При движении вдоль оси абсцисс

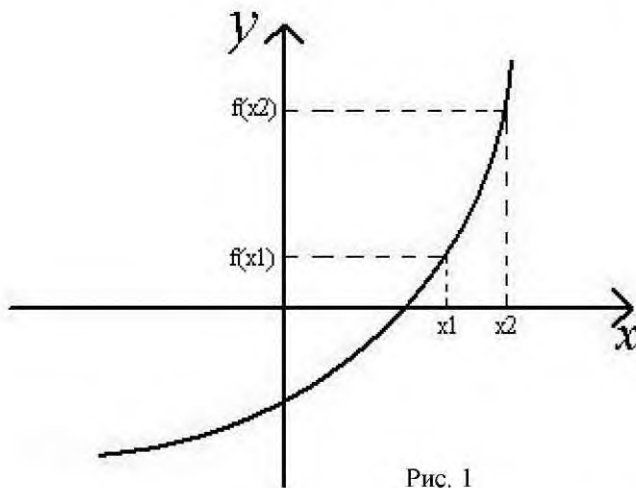


Рис. 1

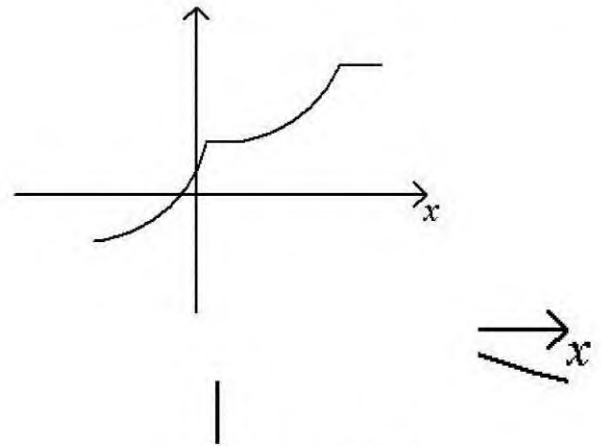


Рис. 2

слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 1), а ордината убывающей функции уменьшается (рис. 2).

Если функция невозрастающая (или неубывающая), то её график может иметь участки постоянства (рис. 3).

Определение 3. Возрастающие и убывающие функции называются монотонными функциями.

Используя геометрический смысл чётности и нечётности функций, можно установить связь возрастания (убывания) с чётностью и нечётностью функции.

1⁰. Если функция $y = f(x)$ на множестве X чётна и возрастает при $x > 0$, то она убывает при $x < 0$ (рис. 4).

2⁰. Если функция $y = f(x)$ на множестве X чётна и убывает при $x > 0$, то она возрастает при $x < 0$ (рис. 5).

3⁰. Если функция $y = f(x)$ на множестве X нечётна и возрастает при $x > 0$, то она возрастает при $x < 0$; кроме того, она возрастает на всём множестве X (рис. 6).

4⁰. Если функция $y = f(x)$ на множестве X нечётна и убывает при $x > 0$, то она убывает и при $x < 0$; кроме того, она убывает на всём множестве X (рис. 7).

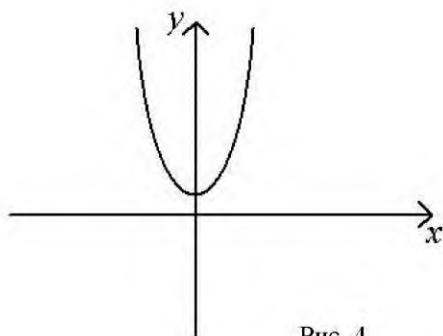


Рис. 4

Рис. 5

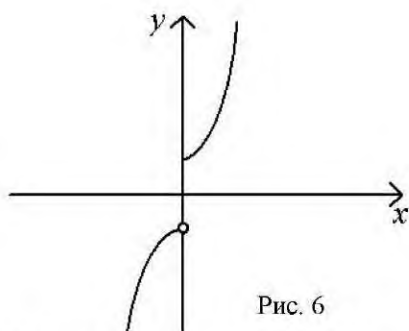
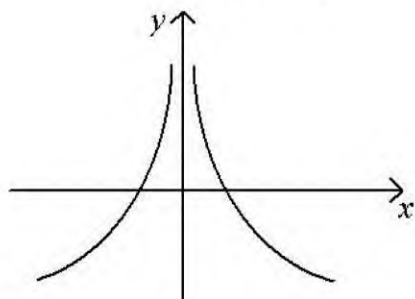


Рис. 6

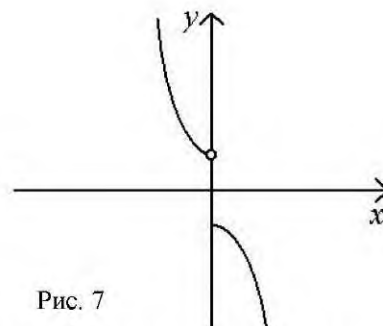
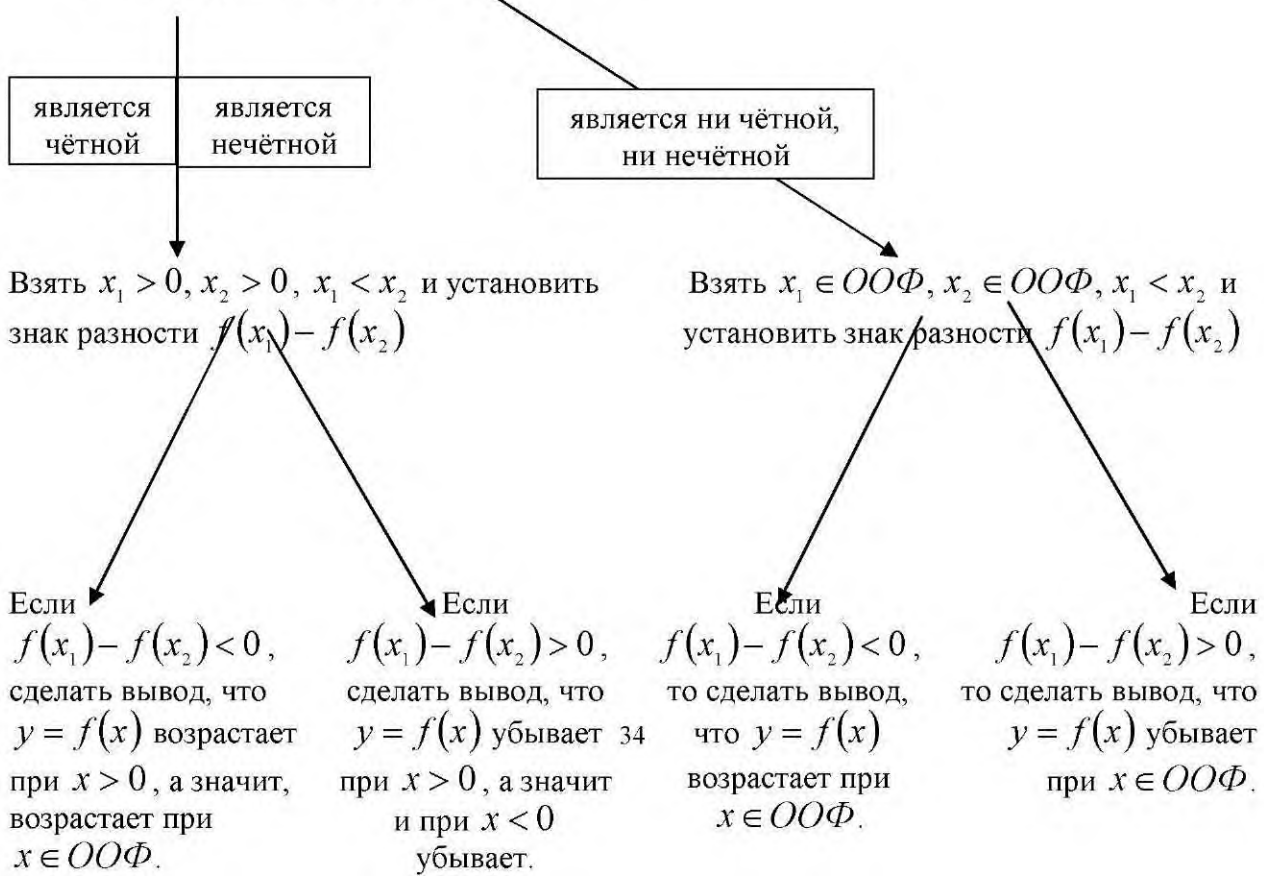


Рис. 7

Из приведённых фактов следует **алгоритм исследования функции на монотонность** элементарными средствами.

1. Установить ООФ и исследовать на чётность.
2. Если функция $f(x)$:



Можно исследование на монотонность проводить средствами математического анализа, используя достаточные признаки монотонности.

5⁰. Достаточный признак возрастания функции

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала J , то функция $y = f(x)$ возрастает на J .

6⁰. Достаточный признак убывания функции

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала J , то функция $y = f(x)$ убывает на J .

Алгоритм исследования функции на монотонность средствами математического анализа:

1. Установить ООФ.
2. Найти $f'(x)$.
3. Решить неравенства $f'(x) < 0$ и $f'(x) > 0$.
4. Проверив непрерывность функции на концах промежутков возрастания и убывания, записать ответ.

Рассмотрим образцы примеров исследования функции на монотонность.

Пример 4.1. Исследовать на монотонность функцию $y = x^3$.

Решение.

1 способ.

1) ООФ: $x \in R$; функция нечётная.

2) Пусть $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 < x_2$, тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_1x_2 + x_2) < 0 \Rightarrow y = x^3$$

возрастает при $x \in (0; \infty)$. Т.к. $y = x^3$ - функция нечётная, то она возрастает и при $x < 0$.

3) На основании свойств нечётной функции и непрерывности $y = x^3$ в точке $x = 0$, делаем вывод, что $y = x^3$ возрастает при $x \in R$.

2 способ.

1) ООФ: $x \in R$.

2) $y' = 3x^2$.

3) $3x^2 > 0$ при $x \in R$.

4) Следовательно, функция возрастает при $x \in R$.

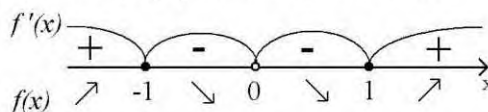
Пример 4.2 Исследовать на монотонность $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

Решение.

1) ООФ: $x \neq 0$.

2) $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$.

3) $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$. Точки 0, 1, -1 разбивают ООФ, на 4 промежутка. Определим знак $f'(x)$ на каждом из них.



4) Т.к. в точках ± 1 функция непрерывна, то ответ будет следующим: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$; убывает на промежутках $[-1; 0)$, $(0; 1]$.

Рассмотрим специальную **теорему**, устанавливающую связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения:

1) Если одна из функций возрастает, а другая убывает на промежутке X , то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X .

2) Если одна из функций возрастает (убывает), а другая принимает постоянные значения на промежутке X , то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (один или не одного) на промежутке X .

Из теоремы следует **алгоритм решения уравнений методом использования монотонности:**

1) Исследовать на монотонность функции $f(x)$ и $g(x)$ в области определения уравнения.

2) Если выполняются условия теоремы для функций $f(x)$ и $g(x)$ и удаётся подобрать x_0 , удовлетворяющее уравнению $f(x) = g(x)$, то x_0 - единственный корень этого уравнения.

Рассмотрим примеры решения уравнений методом использования монотонности функций.

Пример 4.3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

Решение

Исследуем на монотонность функции $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $g(x) = x - 4$ в области определения уравнения $x > 0$. Функция $f(x)$ убывает, функция $g(x)$ возрастает. Уравнению удовлетворяет $x = 3$. Следовательно, согласно теореме, это единственный корень.

Ответ: $x = 3$.

Пример 4.4. Решить уравнение $7^x + 2^x = 9$.

Решение

Функция $f(x) = 7^x + 2^x$ возрастает при $x \in \mathbb{R}$, функция $g(x) = 9$ принимает постоянные значения при $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $x = 1$ - единственный корень уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4.5. Решить уравнение $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$.

Решение

Исследуем функцию $f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ на монотонность. Применим для исследования производную: $f'(x) = 10x^4 + 3x^2 + 5$, т.к. $D = b^2 - 4ac = 9 - 200 < 0$, то $f'(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, т.е. $f(x)$ - возрастающая функция. Исследуем на монотонность функцию $g(x) = \sqrt[3]{14 - 3x}$; $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(14 - 3x)^2}} < 0$ при $x \neq \frac{4}{3}$, т.е. $g(x)$ - убывающая функция. Так как функция $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то $x = 2$ - единственный корень.

Ответ: $x = 2$.

Пример 4.6. Решить уравнение $2x^3 + 9x^2 + 150x - 161 = 0$.

Решение

Исследуем на монотонность $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 150x - 161$. $f'(x) = 6x^2 + 18x + 150$. $D = 81 - 1200 < 0$, $f'(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, следовательно, функция $f(x)$ возрастает, а значит, каждое своё значение принимает единственный раз. При $x = 1$ $f(x) = 0$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4.7. Решить уравнение $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решение

$x = 2$ удовлетворяет уравнению, но утверждать, что это единственный корень, нельзя. Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1$. В левой части

полученного уравнения сумма убывающих функций (основания показательных функций положительны и меньше 1), следовательно, левая и правая части уравнения удовлетворяют условию теоремы, а значит $x = 2$ - единственный корень.

Ответ: $x = 2$.

Анализируя решённые примеры, можно сделать вывод о том, **к каким типам уравнений можно пытаться применить рассмотренный метод:**

- 1) Если в уравнение входят функции разного вида (примеры: 4.3; 4.5).
- 2) Если в одной части уравнения возрастающая, а в другой соответственно убывающая или постоянная функция (примеры: 4.3; 4.4; 4.5; 4.6).
- 3) Если в обеих частях уравнения функции одинаковой монотонности, но уравнение можно свести к уравнениям предыдущего вывода (пример: 4.7).

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $x + 3 = 2^{3-x}$	$x = 1$. Исследовать на монотонность части данного уравнения.
2. $3 - \operatorname{tg} x = 14^x + 2 \cdot 5^x$	$x = 0$. Исследовать на монотонность левую и правую части уравнения и сделать вывод на основании теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
3. $8x^3 + 3x^2 + 42x = 52$	$x = 1$. Исследовать на монотонность с помощью производной левую часть и сделать вывод на основании соответствующей теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
4. $2^{\sqrt{x}} - 8^{\sqrt{x}} + 6^{\sqrt{x}} = 0$	$x = 1$. Привести уравнение к виду $\left(\frac{2}{8}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{6}{8}\right)^{\sqrt{x}} = 1$ и применить соответствующую теорему о монотонности функций, входящих в уравнение.
5. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$	$x = 1$. В левой части уравнения убывающая функция, а в правой – возрастающая.
6. $5^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 9^x + 4^x$	$x = 2$. Преобразовать уравнение к виду $5^x = (3^x - 2^x)^2$, а затем к виду $(\sqrt{5})^{2x} = (3^x - 2^x)^2$, $ (\sqrt{5})^x = 3^x - 2^x $, $(\sqrt{5})^x = 3^x - 2^x$, $(\sqrt{5})^x + 2^x = 3^x$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.
7. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$	$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, получим $\log_2 x = \frac{1-x \pm (x-5)}{2}$ или

	$\begin{cases} \log_2 x = -2, \\ \log_2 x = 3 - x; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ x = 2; \end{cases}$ используя монотонность функций в области определения уравнения.
8. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$	$x = 100$. Левая часть уравнения – возрастающая функция, правая – убывающая.
9. $x^{\lg^2 x} + 10^{\lg x} = 20$	$x = 10$. Т.к. $x = 10^{\lg x}$, - преобразовать исходное уравнение к виду $10^{\lg^3 x} = 20 - x$. В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой – убывающая.
10. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 5} - (x - 8,1)^{\log_{x-1} \frac{97}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$	$x = 9$. Преобразовать к виду $\frac{(x-2)^2}{x-5} - \frac{97}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ и применить метод использования монотонности функций в области определения уравнения.
11. $x + 2 = 7^{6-x}$	$x = 5$. В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой – убывающая.
12. $12^x + 7^x = 19^x$	$x = 1$. Преобразовать уравнение к виду $\left(\frac{12}{19}\right)^x + \left(\frac{7}{19}\right)^x = 1$. Уравнение удовлетворяет условию теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
13. $5^{\sqrt{x}} - 13^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 0$	$x = 4$. Преобразовать уравнение к виду $\left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}} = 1$. Уравнение удовлетворяет условию теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
14. $2 - \operatorname{tg} x = 2^x + 5^x$	$x = 0$. В левой части уравнения убывающая функция при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, в правой – возрастающая.

5. Уравнения с двумя неизвестными

Под уравнением с двумя неизвестными будем понимать уравнения вида $f(x; y) = 0$.

Рассмотрим четыре способа решения уравнений с двумя неизвестными.

1 способ. Использование условия равенства нулю суммы неотрицательных чисел.

Сущность способа – замена исходного уравнения системой уравнений.

Теоретической основой способа является утверждение:

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю.

Из вышесказанного следует, что представляемый метод применим к уравнениям вида

$$f^{2k}(x; y) + g^{2n}(x; y) + \dots + \varphi^{2m}(x; y) = 0 \quad (*)$$

$$\sqrt[2k]{f(x; y)} + g^{2n}(x; y) = 0 \quad (**)$$

$$|f(x; y)| + g^{2m}(x; y) = 0 \quad (***)$$

и другие аналогичные виды.

Алгоритм метода:

1. Сравнить данное уравнение с перечисленными выше видами.
2. Если уравнение имеет вид (*), (**) или (***), то заменить данное уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(x; y) = 0 \end{cases}$$

3. Решить полученную систему в области определения уравнения (ООУ) и записать ответ.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$\ln^6(x^2 - 2x - 14) + \sqrt{x^4 + 2x^3 - 27} + |y - 1| = 0.$$

Решение.

- 1) Уравнение имеет вид

$$f^{2k}(x) + \sqrt{g(x)} + |\varphi(x; y)| = 0$$

- 2) Заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений:

$$\begin{cases} \ln^6(x^2 - 2x - 14) = 0, \\ \sqrt{x^4 + 2x^3 - 27} = 0, \\ |y - 1| = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ln(x^2 - 2x - 14) = 0, & (1) \\ x^4 + 2x^3 - 27 = 0, & (2) \\ y - 1 = 0. & (3) \end{cases}$$

- 3) Решим первое и третье уравнения полученной системы:

$$\ln(x^2 - 2x - 14) = 0 \qquad y - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 14 = 0 \qquad y = 1$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -3$$

ров

ерим, является ли $x_1 = 5$; $x_2 = -3$ корнями уравнения (2):

$$\begin{cases} x = 5, \\ 5^4 + 2 \cdot 125 - 27 \neq 0. \end{cases} \quad \text{Получили, что } x_1 = 5 \text{ - не корень уравнения (2).}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ 81 - 54 - 27 = 0. \end{cases} \quad \text{Значит, } x_1 = -3 \text{ - корень уравнения (2), а}$$

следовательно, решением данного уравнения является пара $(-3; 1)$.

Ответ: $(-3; 1)$.

Пример 5.2. Решить уравнение $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 14xy + 2x - 2y + 37 = 0$.

Решение.

- 1) Попробуем свести данное уравнение к виду (*):

$$(x^2 y^2 - 12xy + 36) + (x^2 - y + 1)^2 = 0 \text{ или } (xy - 6)^2 + (x - y + 1)^2 = 0$$

2) Полученное уравнение равносильно системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (xy - 6)^2 = 0, \\ (x - y + 1)^2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases}$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ или } x = 2.$$

А)

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2 + 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Б)

$$\begin{cases} x = -3, \\ y = -3 + 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Отв

ет: $(2; 3); (-3; -2)$.

2 способ. Метод оценки.

Сущность метода и его теоретические основы разъяснены в пункте 2 «Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций».

Рассмотрим примеры использования метода.

Пример 5.3. Решить уравнение $\frac{x^4+1}{x^2} = \sqrt{4-|y|}$.

Решение.

$$\frac{x^4+1}{x^2} = \sqrt{4-|y|} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{4-|y|} \quad \text{ООУ: } x \neq 0, -4 \leq y \leq 4$$

Пусть $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ и $g(x) = \sqrt{4-|y|}$. Оценим каждую функцию.

а) $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ (по теореме $t + \frac{1}{t} \geq 2$ при $t > 0$), т.е. $f(x) \geq 2$.

б) $0 \leq 4-|y| \leq 4$, следовательно, $0 \leq \sqrt{4-|y|} \leq 2$, т.е. $g(x) \leq 2$.

Условия соответствующей теоремы в ООУ выполняются, значит исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^4+1}{x^2} = 2, \\ \sqrt{4-|y|} = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x = \pm 1, y = 0$.

Ответ: $(1; 0), (-1; 0)$.

Пример 5.4. Решить уравнение $(x^2 - 4|x| + 5)(y^2 + 6y + 12) = 3$.

Решение.

Пусть

а) $f(x) = x^2 - 4|x| + 5$

$$|x_0| = \frac{4}{2} = 2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 + 5 = 1, \text{ тогда } x^2 - 4|x| + 5 \geq 1.$$

б) $g(y) = y^2 + 6y + 12$

$$y_0 = -\frac{6}{2} = -3$$

$$g(y_0) = g(-3) = 9 - 18 + 12 = 3, \text{ тогда } g(y) \geq 3.$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4|x| + 5 = 1, \\ y^2 + 6y + 12 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -3), (-2; -3)$.

3 способ. Решение уравнения с двумя неизвестными второй степени, как квадратного относительно одной из неизвестных.

Теоретической основой способа является теория квадратных уравнений.

Рассмотрим примеры решения уравнений этим способом.

Пример 5.5. Решить уравнение $20x^2 + y^2 - 4xy + 24x + 9 = 0$.

Решение.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x .

$$20x^2 - 2x(2y - 12) + y^2 + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2y - 12 \pm \sqrt{4y^2 - 48y + 144 - 20y^2 - 180}}{20} = \frac{2y - 12 \pm \sqrt{-16y^2 - 48y - 36}}{20} = \\ &= \frac{2y - 12 \pm \sqrt{-4(4y^2 - 12y - 9)}}{20} = \frac{2y - 12 \pm \sqrt{-4(2y + 3)^2}}{20}. \end{aligned}$$

Т.к. $D = -4(2y + 3)^2 \leq 0$, то, следовательно, уравнение имеет решение при

условии $(2y + 3)^2 = 0$, т.е. $y = -\frac{3}{2}$, а тогда $x = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 12}{20} = -\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$.

4 способ. Разложение на множители.

Сущность: представить данное уравнение в виде $f(x; y) \cdot g(x; y) \cdot \dots = 0$ и воспользоваться условием равенства произведения нулю.

Пример 5.6 Решить уравнение $xy - 2 = 2x - y$.

Решение.

$$\begin{aligned} xy - 2 = 2x - y &\Rightarrow xy - 2x - 2 + y = 0 \Rightarrow x(y - 2) + (y - 2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ или } x = -1. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; y), y \in R; (x; 2), x \in R$.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $\frac{x^2 + y^2 + x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2\sqrt{xy}$	$(1; 1)$. Свести уравнение к виду $(x - \sqrt{y})^2 + (y - \sqrt{x})^2 = 0$. $(0; 0)$ – постороннее решение.
2. $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 25} + \ln^6(x^2 + 4x - 4) + y^2 = 0$	$(-5; 0)$.
3. $\sqrt[6]{x^3 + 3x^2 + 16} + \arctg^2(x^2 + x - 12) + \ln^2 y = 0$	$(-4; 1)$.
4. $\sqrt[8]{y^4 + 5y^3 + 64} + \arcsin^2(y^2 + 4y) + \sqrt[4]{x^2 - 1} = 0$	$(1; -4), (-1; -4)$.

5. $tg^2 2x + 2\sqrt{3} \cdot tg 2x + 3 = -ctg^2 \left(4y - \frac{\pi}{3}\right)$	$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z, \\ y = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z. \end{cases}$ Свести уравнение к виду $(tg 2x + \sqrt{3})^2 + ctg^2 \left(4y - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$
6. $\sin^2 \pi x + \log_2(y^2 - 2y + 1) = 0$	$(k; 0), (k; 2), k \in Z.$
7. $1 - 2x - x^2 = tg^2(x + y) + ctg^2(x + y)$	$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1 + \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1, \\ y = 1 - \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z. \end{cases}$ Оценить левую и правую части уравнения.
8. $(x^2 + 2x + 2)(y^2 - 4y + 6) = 2$	$(-1; 2).$ Преобразовать левую часть уравнения $(x^2 + 2x + 2)(y^2 - 4y + 6) = ((x+1)^2 + 1)((y-2)^2 + 2)$ и оценить её.
9. $\log_2(2 + 2\sin(x + y) - \cos^2(x + y)) = 4^x - 2^{x-1} + 3$	$\left(0; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$ Преобразовать левую и правую части уравнения: $2\log_2(1 + \sin(x + y)) = (2^x - 1)^2 + 2$ и оценить их.
10. $9x^2 + 14y^2 + 13 = 12(x + y)$	$\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right).$ Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x , которое будет иметь решение тогда и только тогда, когда $D = (2y - 3)^2 = 0.$
11. $x^2 + 2,5y^2 + 3xy - y + 1 = 0$	$(-3; 2).$ 1 способ: Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x . 2 способ: Преобразовать уравнение к виду $(2x + 3y)^2 + (y - 2)^2 = 0.$
12. $(x^2 + 4)(y^2 + 1) = 8xy$	Рассмотреть как квадратное относительно y :

	$(x^2 + 4)y^2 - 8xy + 4 + x^2 = 0$ Ответ: $(2; 1), (-2; -1)$.
13. $y\sqrt{x} - 1 = y - \sqrt{x}$	$(x; -1), x > 0, x \in R; (1; y), y \in R$. Преобразовать к виду $(y+1)(\sqrt{x}-1)=0$.
14. $4x^2 - 25y^2 = 0$	$\left(x; \frac{2}{5}x\right); \left(x; -\frac{2}{5}x\right); x \in R$.
15. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$	$(x; x); \left(x; \frac{x}{2}\right); x \in R$.
16. $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 0$	$(x; -3x); \left(x; -\frac{1}{3}x\right); x \in R$.
17. $(y-2)^2 + (x+1)^2 = 0$	$(-1; 2)$.
18. $(2y+x-1)^2 + (3x-y+1)^2 = 0$	$\left(-\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right)$.
19. $ 3y+2x-2 + x-y+3 = 0$	$\left(-\frac{7}{5}; \frac{8}{5}\right)$.
20. $y^2 + 4y = x^2 - 4x$	$(x; -x), (x; x-4); x \in R$.

6. Показательно-степенные уравнения

Показательно-степенными уравнениями будем называть уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$: неизвестное входит и в показатель степени и в основание степени.

Решение таких уравнений сводится к рассмотрению пяти случаев, если некоторые из них не исключаются видом функции $f(x)$.

Рассмотрим эти пять случаев:

1) $f(x) > 0, f(x) \neq 1$. Данное уравнение при этих условиях – показательное и оно равносильно смешанной системе:
$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

2) $f(x) = 1$. Необходимо решить это уравнение относительно x и подставить в исходное найденные значения x , проверив истинность получаемого числового равенства.

3) $f(x) = -1$. В этом случае уравнение примет вид $(-1)^{g(x)} = (-1)^{\varphi(x)}$. Полученному уравнению могут удовлетворять только такие значения x , при которых $g(x)$ и $\varphi(x)$ – целые числа, т.к. отрицательное число можно возвести только в целую степень, причём из целых чисел уравнению могут удовлетворять целые числа одинаковой чётности.

4) $f(x) = 0$. Исходное уравнение принимает вид $0^{g(x)} = 0^{\varphi(x)}$. Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x , при которых $g(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$.

$$5) \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \neq -1. \end{cases} \quad \text{Решить полученную систему неравенств и из}$$

полученных значений x отобрать те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

Рассмотрим примеры решения показательно-степенных уравнений.

Пример 6.1. Решить уравнение $(2x-1)^x = (2x-1)^{x^2-2}$.

Решение

Решим данное уравнение по сформулированному алгоритму:

$$1) \quad \begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1, \\ x = x^2 - 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Решением данной системы является $x = 2$.

$$2) \quad \begin{cases} 2x-1 = 1, \\ 1^x = 1^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 1 = 1; \end{cases}$$

$x = 1$ является решением данной системы, а, следовательно, и корнем данной уравнения.

$$3) \quad \begin{cases} 2x-1 = -1, \\ (-1)^x = (-1)^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 1 = 1. \end{cases} \quad \text{Решение данной системы } x = 0,$$

значит, это очередной корень данного уравнения.

$$4) \quad \begin{cases} 2x-1 = 0, \\ 0^x = 0^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ 0^{\frac{1}{2}} = 0^{\frac{7}{4}}. \end{cases} \quad \text{Для того, чтобы } x = \frac{1}{2} \text{ являлся}$$

корнем данного уравнения, необходимо чтобы в данной системе выполнялись неравенства $g(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$. Однако, $\varphi(x) = -\frac{7}{4} < 0$, следовательно,

$x = \frac{1}{2}$ корнем данного уравнения не является.

$$5) \quad \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ 2x-1 \neq -1, \\ x = x^2 - 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases} \end{cases} \quad \text{Решением данной системы является}$$

$x = -1$.

Ответ: $\{-1, 0, 1, 2\}$.

Пример 6.2. Решить уравнение $(tgx)^{\sin x} = (ctgx)^{\cos x}$.

Решение

Преобразуем данное уравнение к виду $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{-\cos x}$. Переберём четыре возможных случая:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \\ \sin x = -\cos x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \quad - \quad \text{система}$$

несовместна.

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ 1^{\sin x} = 1^{-\cos x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 1 = 1 \end{cases} \quad \text{Следовательно,}$$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ - решение данного уравнения.

$$3) \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ (-1)^{\sin x} = (-1)^{\cos x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{\sin x} = (-1)^{\cos x}. \end{cases} \quad \text{У этой системы}$$

нет решений, т.к. при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, синус и косинус не принимают целые значения.

$$4) \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ \operatorname{tg} x \neq -1, \\ \sin x = -\cos x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ \operatorname{tg} x \neq -1, \\ \operatorname{tg} x = -1. \end{cases} \quad \text{Система не имеет решения.}$$

Просмотрев результаты решения, получаем $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6.3. Решить уравнение $|3x^2 - 2|^{\sqrt{x+1}} = |3x^2 - 2|^{1+\sqrt{x}}$.

Решение

В данном уравнении $f(x)$ является величиной абсолютной, что позволяет нам рассмотреть всего 3 случая, т.к. $|3x^2 - 2| \geq 0$.

$$1) \quad \begin{cases} |3x^2 - 2| > 0, \\ |3x^2 - 2| \neq 1, \\ \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \begin{cases} x_{1,2} \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x_{3,4} \neq \pm 1, \end{cases} \\ \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

Решив уравнение $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}$, получим $x = 0$, который удовлетворяет смешанной системе.

$$2) \quad \begin{cases} |3x^2 - 2| = 1, \\ 1^{\sqrt{x+1}} = 1^{1+\sqrt{x}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1, \\ x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 1^{\sqrt{x+1}} = 1^{1+\sqrt{x}}. \end{cases} \quad \text{Первое уравнение имеет}$$

четыре корня, причём только два из них $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ удовлетворяют области определения уравнения рассматриваемой системы.

$$3) \quad \begin{cases} |3x^2 - 2| = 0, \\ 0^{\sqrt{x+1}} = 0^{1+\sqrt{x}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ 0^{\sqrt{x+1}} = 0^{1+\sqrt{x}}. \end{cases} \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}} - \text{не удовлетворяет}$$

области определения уравнения системы. Следовательно, $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ - корень уравнения.

Ответ: $\left\{0; \frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right\}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ
1. $(3x - 4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x}$	$\left\{\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2\right\}$. Рассмотреть все случаи в соответствии с алгоритмом.
2. $ x - 1 ^{\lg^2 x - \lg x^2} = x - 1 ^3$	$\left\{\frac{1}{10}; 2; 1000\right\}$.

	Т.к. $f(x) = x - 1 $, то рассмотреть 3 возможные случая в соответствии с рассмотренным алгоритмом.
3. $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} - \frac{1}{x} = 0$	$\left\{\frac{1}{2}; 1; 16\right\}$. Т.к. область определения уравнения $x > 0$, то решение этого уравнения будет содержать два перебора для x : 1) $x > 0, x \neq 1$; 2) $x = 1$.
4. $\sqrt[3]{ x^2 - 3 ^{x+2}} = \sqrt[4]{ x^2 - 3 ^{x-1}}, x \neq \pm\sqrt{3}$	$\{-11; \pm\sqrt{2}; \pm 2\}$
5. $\sqrt[4]{ x - 3 ^{x+1}} = \sqrt[3]{ x - 3 ^{x-2}}, x \neq 3$	$\{2; 4; 11\}$.
6. $x^{\log_3^3 x - 1 + \log_{\frac{1}{3}} x} = x^{3 \log_3 x}$	$\left\{\frac{1}{9}; 1; 9\right\}$.
7. $(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}$	$\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}; 7; \frac{-1 \pm \sqrt{229}}{2}; 3\right\}$.
8. $(x - 2)^{x^2-x} = (x - 2)^{12}$	$\{-3; 1; 2; 3; 4\}$.

7. Некоторые другие нестандартные уравнения

Рассмотрим решение других нестандартных уравнений на конкретных примерах.

Пример 7.1 Решить уравнение $\sqrt{33 + \frac{8}{\log_x 4}} = 3 \log_4 (4\sqrt[3]{x^2})$.

Решение

Так как x – основание логарифма, то $x > 0, x \neq 1$. При таких x определена и правая часть уравнения.

Преобразуем обе части исходного уравнения: $\frac{8}{\log_x 4} = 8 \log_4 x$;

$$3 \log_4 (4\sqrt[3]{x^2}) = 3 \log_4 4 \left(4x^{\frac{2}{3}} \right) = 3 \left(1 + \frac{2}{3} \log_4 x \right) = 3 + 2 \log_4 x.$$

При $x > 0, x \neq 1$ получим уравнение, равносильное исходному.

$$\sqrt{8 \log_4 x + 33} = 2 \log_4 x + 3.$$

Пусть $t = \log_4 x$. Тогда $\sqrt{8t + 33} = 2t + 3$;

$$\begin{cases} 2t + 3 \geq 0, \\ 8t + 33 = (2t + 3)^2; \end{cases}$$

$$8t + 33 = 4t^2 + 12t + 9;$$

$$4t^2 + 4t - 24 = 0$$

$$t^2 + t - 6 = 0;$$

$$t_1 = 2,$$

$$t_2 = -3.$$

При $t = -3$ $2t + 3$ отрицательна. Число 2 проверим подстановкой $\sqrt{8 \cdot 2 + 33} = 2 \cdot 2 + 3$.

Значит, $\log_4 x = 2$, $x = 4^2$, $x = 16$.

Ответ: 16.

Пример 7.2. Найти все значения p , при которых уравнение $4 \sin x + 9 = p(\operatorname{ctg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Решение

Преобразуем данное уравнение $4 \sin x + 9 = p(\operatorname{ctg}^2 x)$;

$$4 \sin x + 9 = p \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right); \quad 4 \sin x + 9 = \left(\frac{p}{\sin^2 x} \right).$$

Последнее уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} 4 \sin^3 x + 9 \sin^2 x = p, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $4 \sin^3 x + 9 \sin^2 x = p$ имеет хотя бы один корень, если число p принадлежит множеству значений выражения $4 \sin^3 x + 9 \sin^2 x$. Найдём множество значений функции $y = 4 \sin^3 x + 9 \sin^2 x$ или $y = (4 \sin x + 9) \sin^2 x$.

Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ и $9 - 4 \leq 4 \sin x + 9 \leq 4 + 9$, то есть $5 \leq 4 \sin x + 9 \leq 13$.

Значит, $0 \leq (4 \sin x + 9) \sin^2 x \leq 13$. Следовательно, $0 \leq y \leq 13$.

Покажем, что функция y принимает все значения от 0 до 13.

При $\sin x = 0$ функция y принимает значения 0, при $\sin x = 1$ - значение 13. Поэтому 0 - её наименьшее, а 13 - её наибольшее значения. Так как синус - непрерывная функция, то и функция y непрерывная и, значит, принимает все значения от 0 до 13. Поэтому $E(y) = [0; 13]$.

Так как по условию $\sin x \neq 0$, то значение p - любое число из промежутка $(0; 13]$.

Примечание. Уравнение $4\sin^3 x + 9\sin^2 x = p$ можно преобразовать к

$$\text{равносильной системе } \begin{cases} \sin x = t, \\ -1 \leq t \leq 1, t \neq 0, \text{ и решить систему графически.} \\ 4t^3 + 9t^2 = p \end{cases}$$

Ответ: $(0; 13]$.

Пример 7.3. Решить уравнение $x - |x|\sqrt{1 - \frac{4}{9x+4}} + 2 = 0$.

Решение

Преобразуем данное уравнение

$$x + 2 = |x|\sqrt{1 - \frac{4}{9x+4}} \Rightarrow x + 2 = |x|\sqrt{\frac{9x}{9x+4}}.$$

Подкоренное выражение и правая часть должны быть неотрицательны. Значит уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ \frac{9x}{9x+4} \geq 0, \\ (x+2)^2 = |x|^2 \cdot \frac{9x}{9x+4}. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы.

Так как $|x|^2 = x^2$, то

$$(x^2 + 4x + 4)(9x + 4) = 9x^3;$$

$$9x^3 + 40x^2 + 52x + 16 = 9x^3;$$

$$40x^2 + 52x + 16 = 0;$$

$$10x^2 + 13x + 4 = 0;$$

$$x_1 = -0.8; \quad x_2 = -0.5.$$

Для чисел -0.8 и -0.5 неравенство $x + 2 \geq 0$ верно. Для обоих чисел -0.8 и -0.5 числитель и знаменатель дроби $\frac{9x}{9x+4}$ отрицательны, то есть верно

неравенство $\frac{9x}{9x+4} \geq 0$. Следовательно, числа -0.8 и -0.5 являются корнями

системы и поэтому являются корнями исходного уравнения.

Ответ: -0.8 и -0.5 .

Пример 7.4. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 6x + \frac{36x(x+6)}{x^2 - 36}} - 1 = x$.

Решение

При $x = \pm 6$ не определена левая часть уравнения.

Для остальных x преобразуем подкоренное выражение:

$$x^2 + 6x + \frac{36x(x+6)}{x^2 - 36} = x^2 + 6x + \frac{36x}{x-6} = \frac{(x^2 + 6x)(x-6) + 36x}{x-6} = \frac{x^3}{x-6}.$$

Получаем уравнение $\sqrt{\frac{x^3}{x-6}} = x+1$, равносильное исходному при $x \neq \pm 6$.

Подкоренное выражение и левая часть уравнения должны быть неотрицательны. Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ \frac{x^3}{x-6} \geq 0, \\ \frac{x^3}{x-6} = (x+1)^2. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы.

$$x^3 = (x-6)(x^2 + 2x + 1);$$

$$x^3 = x^3 - 4x^2 - 11x - 6;$$

$$4x^2 + 11x + 6 = 0;$$

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -0.75.$$

Для $x_1 = -2$ неравенство $x+1 \geq 0$ неверно. Значит, это не корень системы и не корень исходного уравнения. Для $x_2 = -0,75$ неравенство $x+1 \geq 0$ верно, а числитель и знаменатель дроби $\frac{x^3}{x-6}$ отрицательны, то есть сама дробь $\frac{x^3}{x-6}$ положительна. Значит, $x_2 = -0,75$ являются корнем системы и поэтому является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_2 = -0,75$.

Пример 7.5. Решить уравнение

$$(\log_5(-2x^2 + 5x + 7) - \log_5(x+1)) \cdot \log_{57-24x} 25 = 1.$$

Решение

По условию $-2x^2 + 5x + 7 > 0$; $x+1 > 0$ и $57-24x > 0$, $57-24x \neq 1$. Так как $-2x^2 + 5x + 7 = (x+1)(7-2x)$, то $7-2x > 0$. При таких x равносильны уравнения:

$$(\log_5(-2x^2 + 5x + 7) - \log_5(x+1)) \cdot \log_{57-24x} 25 = 1;$$

$$(\log_5(x+1)(7-2x) - \log_5(x+1)) \cdot \log_{57-24x} 25 = 1;$$

$$(\log_5(x+1) + \log_5(7-2x) - \log_5(x+1)) \cdot \log_{57-24x} 5^2 = 1;$$

$$2 \cdot \log_5(7-2x) \cdot \log_{57-24x} 5 = 1;$$

$$\frac{2 \cdot \log_5(7-2x)}{\log_5(57-24x)} = 1;$$

$$\log_5(7-2x)^2 = \log_5(57-24x).$$

Логарифмическая функция монотонна. Получаем уравнение
 $(7 - 2x)^2 = 57 - 24x$.

Решим его:

$$49 - 28x + 4x^2 = 57 - 24x;$$

$$4x^2 - 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2.$$

Число -1 не входит в ОДЗ, так как $x + 1 = 0$.

Число 2 проверим подстановкой:

$$\begin{aligned} (\log_5(-8 + 10 + 7) - \log_5 3) \cdot \log_{57-48} 25 &= (\log_5 9 - \log_5 3) \cdot \log_9 25 = \\ &= \log_5 3 \cdot \log_{3^2} 5^2 = \log_5 3 \cdot \log_3 5 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример 7.6. Найти все значения p , при которых уравнение

$$2 \cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -11 \text{ не имеет корней.}$$

Решение

Преобразуем данное уравнение:

$$2 \cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -11;$$

$$2(1 - 2 \sin^2 x) + \frac{p}{\sin x} = -11;$$

$$4 \sin^2 x - 13 = \frac{p}{\sin x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} (4 \sin^2 x - 13) \sin x = p; \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$ Найдём

значения p , при которых эта система имеет решения.

Уравнение $(4 \sin^2 x - 13) \sin x = p$ имеет корни, только в том случае, когда число p принадлежит множеству значений выражения $(4 \sin^2 x - 13) \sin x$. Значит, следует найти множество значений функции $y = 4 \sin^3 x - 13 \sin x$.

Пусть $\sin x = t$. Тогда $y = 4t^3 - 13t$, $-1 \leq t \leq 1$. Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $|t| \leq 1$. Отсюда $0 \leq t^2 \leq 1$ и $12t^2 - 13 \leq -1 < 0$. Поэтому $y < 0$ и функция y убывает на отрезке $[-1; 1]$. Следовательно, $y(-1) = 9$ - наибольшее, а $y(1) = -9$ - наименьшее значение функции y . Так как синус - непрерывная функция, то функция y непрерывная. Поэтому она принимает все значения от наименьшего, до наибольшего, то есть $E(y) = [-9; 9]$.

По условию $\sin x \neq 0$.

Значит, система $\begin{cases} (4\sin^2 x - 13)\sin x = p; \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$ имеет решения при

$p \in [-9; 0) \cup (0; 9]$. Следовательно, эта система не имеет решения при $p \in (-\infty; -9) \cup \{0\} \cup (9; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -9) \cup \{0\} \cup (9; +\infty)$.

Пример 7.7. Решить уравнение $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} - 2x = 7$

Решение

Оставим квадратный корень в левой части и возведем в квадрат:

$$\sqrt{49 + 9x|x + 4|} - 2x = 7; \quad \sqrt{49 + 9x|x + 4|} = 2x + 7; \quad 9x|x + 4| = 4x^2 + 28x.$$

Запишем члены уравнения в левой части и вынесем общий множитель:

$$4x^2 + 28x - 9x|x + 4| = 0;$$

$$x(4x + 28 - 9|x + 4|) = 0.$$

Подстановкой проверяем, что $x = 0$ – корень уравнения. При остальных x получаем $9|x + 4| = 4x + 28$.

а. При $x < -4$ получаем: $-9x - 36 = 4x + 28; 13x = -64;$

$x = -\frac{64}{13} < -4$. Но при таком x сумма $2x + 7$ отрицательна, следовательно,

равенство $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} = 2x + 7$ невозможно.

б. При $x \geq -4$ получаем: $9x + 36 = 4x + 28; x = -\frac{8}{5} > -4$.

Проверим. Подставив $-\frac{8}{5}$ в левую часть исходного уравнения, получим:

$$\sqrt{49 + 9 \cdot \frac{8}{5} \left| -\frac{8}{5} + 4 \right|} - 2 \cdot \left(-\frac{8}{5} \right) = \sqrt{\left(\frac{19}{5} \right)^2} + \frac{16}{5} = 7. \text{ Следовательно, } -\frac{8}{5} \text{ - корень}$$

данного уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{5}; 0$.

Пример 7.8. Решите уравнение $2|2^x - x| = 3 \cdot 4^x + 2^{x+2} - 1,75$.

Решение

Приведём степени к одному основанию. Получим уравнение, равносильное данному:

$$2 \cdot |2^x - x| = 3 \cdot (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 1,75.$$

Пусть $2^x = y$, тогда уравнение принимает вид:

$3y^2 + 4y - 1,75 - 2 \cdot |y - 1| = 0$. Это уравнение, используя определение модуля, заменим равносильной ему совокупностью систем:

$$\begin{cases} y \geq 1, \\ 3y^2 + 4y - \frac{7}{4} - 2(y-1) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < y < 1, \\ 3y^2 + 4y - \frac{7}{4} + 2(y-1) = 0. \end{cases}$$

а. Уравнение первой системы приведём к виду:
 $12y^2 + 8y + 1 = 0$. По формуле корней квадратного уравнения получаем:

$y = -\frac{1}{2}$ или $y = -\frac{1}{6}$. Это посторонние решения системы, так как не выполняется условие $y \geq 1$. Следовательно, система решений не имеет.

б. Уравнение второй системы приведём к виду:
 $4y^2 + 8y - 5 = 0$. По формуле корней квадратного уравнения получаем:
 $y = -\frac{5}{2}$ или $y = \frac{1}{2}$. Неравенству $0 < y < 1$, удовлетворяет только $y = \frac{1}{2}$, который является решением второй системы, и, следовательно, совокупности системы.

Итак, $2^x = \frac{1}{2}$, следовательно $x = -1$.

Ответ: -1.

Пример 7.9. При каких a уравнение $(2x - 3a) \log_{a+2-x} \left(\frac{a^2 - 2a + x}{4x^2 - 11x + 8} \right) = 0$

- а) не имеет решения;
- б) имеет единственный корень;
- в) имеет 2 корня;
- г) имеет 3 корня.

Решение

1) Найдём ООУ:

$$\begin{cases} a+2-x > 0, \\ a+2-x \neq 1, \\ 4x^2 - 11x + 8 \neq 0, \\ \frac{a^2 - 2a + x}{4x^2 - 11x + 8} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < a+2, \\ x \neq a+1, \\ x \in R, \\ x > 2a - a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < a+2, \\ x \neq a+1, \\ x > 2a - a^2. \end{cases}$$

2) Решим данное уравнение, воспользовавшись условием равенства произведения нулю:

$$\begin{aligned} 2x - 3a = 0 & \quad \text{или} \quad \log_{a+2-x} \left(\frac{a^2 - 2a + x}{4x^2 - 11x + 8} \right) \\ x_1 = \frac{3a}{2} & \quad \frac{a^2 - 2a + x}{4x^2 - 11x + 8} = 1, \\ & \quad a^2 - 2a + x = 4x^2 - 11x + 8, \\ & \quad 4x^2 - 12x + 8 - a^2 + 2a = 0, \\ & \quad x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32 + 4a^2 - 8a}}{4} = \end{aligned}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4a^2 - 8a + 4}}{4} = \frac{6 \pm (2 - 2a)}{4}$$

$$x_2 = \frac{4 - a}{2}; x_3 = \frac{2 + a}{2}.$$

3) Установим, при каких a найденные x_1, x_2, x_3 удовлетворяют ООУ:

а)
$$\begin{cases} x = \frac{3a}{2}, \\ \frac{3a}{2} < a + 2, \\ \frac{3a}{2} \neq a + 1, \\ \frac{3a}{2} > 2a - a^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \frac{2}{3}, \\ x = \frac{3a}{2}, \text{ если} \\ \begin{cases} a > \frac{2}{3}, \\ a < 0; \end{cases} \end{cases}$$

$a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 4).$

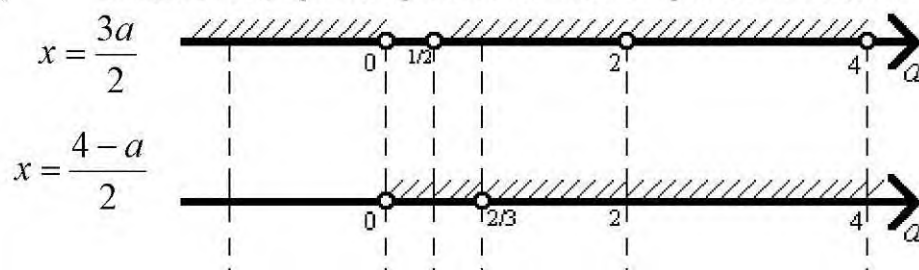
б)
$$\begin{cases} x = \frac{4 - a}{2}, \\ \frac{4 - a}{2} < a + 2, \\ \frac{4 - a}{2} \neq a + 1, \\ \frac{4 - a}{2} > 2a - a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - a}{2}, \\ a > 0, \\ a \neq \frac{2}{3}, \\ a \in R. \end{cases} \quad x = \frac{4 - a}{2}, \text{ если}$$

$a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right).$

в)
$$\begin{cases} x = \frac{2 + a}{2}, \\ \frac{2 + a}{2} < a + 2, \\ \frac{2 + a}{2} \neq a + 1, \\ \frac{2 + a}{2} > 2a - a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + a}{2}, \\ a > -2, \\ a \neq 0, \\ a \in R. \end{cases} \quad x = \frac{2 + a}{2}, \text{ если}$$

$a \in (-2; 0) \cup (0; \infty).$

4) Найдём те a , при которых выполняются требования задачи:



$$x = \frac{2+a}{2}$$

1 корень, если $a \in (-\infty; -2]$.

2 корня, если $a \in (-2; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}; 2\right\} \cup (4; \infty)$.

3 корня, если $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; 4)$.

Нет корней, если $a \in \{0\}$.

Ответ:

Если $a \in (-\infty; -2]$, то 1 корень.

Если $a \in (-2; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}; 2\right\} \cup (4; \infty)$, то 2 корня.

Если $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; 4)$, то 3 корня.

Если $a = 0$, то нет корней.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 6$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ввести переменную $t = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, тогда $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = t^2 - 2$, а для выражения $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ через t воспользоваться формулой $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
2. При каких a уравнение $15 \cdot 10^x - 20 - a - a \cdot 10^{x-1} = 0$ не имеет корней?	$a \in (-\infty; -20] \cup [1, 5; \infty)$. Найти a , при которых исходное уравнение имеет решения. Для этого привести его к виду $10^x = \frac{20+a}{15-10a}$ при $a \neq \frac{3}{2}$ и потребовать чтобы $\frac{20+a}{15-10a}$ было положительным.
3. При каких значениях параметра a уравнение $(\cos x - \log_6 a) \cdot (\cos x - 3 + 3b) = 0$ имеет ровно два корня на отрезке $[0; 2\pi]$?	$\left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{4}{3}; 6\right)$. При решении совокупности простейших тригонометрических уравнений использовать ограниченность $\cos x$, а также рассмотреть случай, когда

	$\log_6 a = 3 - 3b$.
4. При каком a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два корня?	$\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$. Ввести новую переменную $t = 3^x$ и к полученному квадратному уравнению $t^2 - t + 9a^3 = 0$ применить условия $D > 0$, $t_1 \cdot t_2 > 0$.
5. Найти a , при которых уравнение $(a+1) \cdot 4^x + 2(a-1) \cdot 2^x + 3(a-1) = 0$ не имеет решения.	$(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. Ввести новую переменную $t = 2^x$ и рассмотреть уравнение $(a+1)t^2 + 2(a-1)t + 3(a-1) = 0$: а) как линейное; б) как квадратное, не имеющее действительных корней; в) как квадратное, имеющее единственный отрицательный корень или два отрицательных корня.
6. $32^{x+3} \cdot 3^{3x-1} \cdot 625^{x-2} = 600^{x+7}$	$x = 3$. Воспользоваться свойством степеней и преобразовать уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$
7. $6x + x^2 - x^3 - \sqrt{\cos \pi x - 1} = 0$	$\{0; 2\}$. Найти ООУ и решить разложением на множители полученное алгебраическое уравнение 3 степени.
8. Найти значения параметра a , при котором уравнение $ x^2 + 2x - 8 = a$ имеет ровно 3 различных корня.	$a = 9$. Построить графики функций $y = x^2 + 2x - 8 $ и $y = a$.
9. Найти все значения p , при которых уравнение $\sin x - 5 = p(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень	$[-6; 0)$. Решение уравнения аналогично предыдущему или по образцу 6.2.
10. Найти все значения p , при которых уравнение $2^{3x-1} + 8 = 3 \cdot 2^{x-1}(3 + 2^x) + p$ или не имеет корней, или имеет единственный корень.	$(-\infty; -46] \cup [8; \infty)$. Решение аналогично.
11. Найти все значения p , при которых уравнение $2^{x-1}(4^{x+1} + 6) + 2^x(2^{2x} - 9 \cdot 2^{x-1}) = p + 4(9 \cdot 2^{2x-3} - 1)$ имеет ровно 2 корня.	$\left(1\frac{1}{3}; 4\right] \cup \left\{5\frac{5}{6}\right\}$. Решение аналогично, учесть, что $2^x > 0$.
12. При каких значениях p , уравнение $\cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -10$ не имеет решений.	$(-\infty; -9) \cup \{0\} \cup (9; \infty)$.
13. Решить уравнение:	$x = 1$.

$3 + \log_1^4(x^2 - x + 1) = 3 \cos((x-1) \cdot \cos x) $	Использовать метод оценки.
14. Решить уравнение: $\cos^2((x+2) \cdot \cos 2x) - 1 = \log_2(x^2 + 5x + 7) $	$x = -2$. Использовать метод оценки.
15. Решить уравнение: $\sqrt[6]{\cos^6(x^2 \sin x)} - 1 = \log^6(9x^2 + 3x + 1)$	$x = 0$. Использовать метод оценки.
16. Найти все значения p , при которых уравнение $3^x(3^{2(x+1)} - 7,5 \cdot 3^{x+1}) = p - 3(4 \cdot 3^x + 1)$ имеет ровно три корня.	$\left(3; 4\frac{5}{6}\right)$. Преобразовать уравнение к виду $9t^3 - 22,5t^2 + 12t + 3 = p$, где $t = 3^x, t > 0$. Ввести функции $y = 9t^3 - 22,5t^2 + 12t + 3$ и $y = p$, построить их графики и найти ответ.
17. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $\ln x = \frac{a}{x}$?	1 корень, если $a = -\frac{1}{e}$ или $a \geq 0$; 2 корня, если $a \in \left(-\frac{1}{e}; 0\right)$; нет корней, если $a < -\frac{1}{e}$. В ООУ $x > 0$ данное уравнение равносильно уравнению $x \ln x = a_0$. Построить схематический график функции $y = x \ln x$, используя производную, и «считать» с графика ответ.
18. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $e^x = ax$?	1 корень, если $a < 0$ или $a = e$; 2 корня, если $a > e$; нет корней, если $a \in [0; e)$. Свести уравнение к виду $\frac{e^x}{x} = a$ ($x = 0$ - не корень). Построить график функции $y = \frac{e^x}{x}$ и «считать» ответ с графика.
19. $ 1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) = 1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [1; 2) \cup (3; 6]$. Т.к. уравнение имеет вид $ t = t$, то его можно заменить равносильной системой неравенств:

$$\begin{cases} 1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \geq 0, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности
следующих систем неравенств:

$$\text{a) } \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0, \end{cases} \quad \text{б)}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

